التوابع الخاصة *special function*
و معادلة بيسل و لجندر

النسخة رقم 1.00

إعداد فريق إحياء

1431 هـ



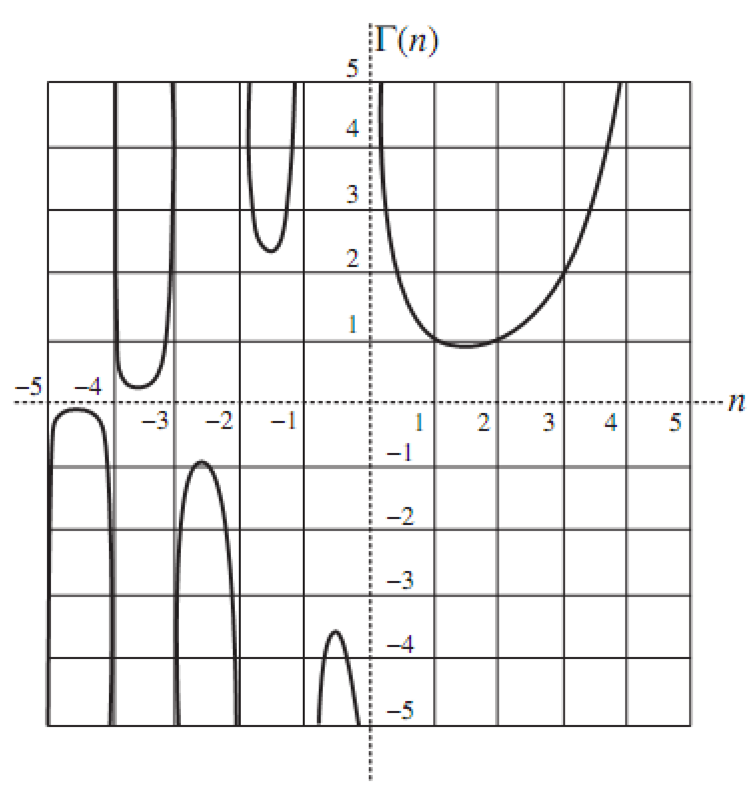
التابع غاما *gamma function*

- الصيغة العامة:

لها عدة أشكال يمكن الانتقال من شكل إلى آخر منها بإجراءات رياضية و لكن أشهرها ه شيغة أولر *Euler* و هي :

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0)$$

- المنحني البياني الخاص به:



- قيم خاصة للتابع غاما :

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Gamma(-m+\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^m 2^m \sqrt{\pi}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Gamma(m+1) = m\,\Gamma(m)$$

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}$$

$$\Gamma(m+1)=m!$$

برهان بعض العلاقات :

-1

- $\Gamma(m+1)=m!$
  $\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)\Rightarrow$
  $m\Gamma(m-1+1)=m(m-1)\Gamma(m-1)=m(m-1)(m-2)\Gamma(m-2)=\ldots$
  $=m(m-1)(m-2)\cdots\Gamma(1)=m!$

-2

- $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}t^{1-1}dt=\int_0^\infty e^{-t}=[-e^{-t}]_0^\infty=1$
- $\Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$

  $\Gamma(\frac{1}{2})^2=\pi\Rightarrow\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

Beta function التابع بيتا

- الصيغة العامة :

$$B(m,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt \qquad m>0,\, n>0$$

- علاقة التابع بيتا بالتابع غاما :

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

البرهان :

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-t}t^{m-1}dt\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{n-1}d\tau=\int_0^\infty e^{-(t+\tau)}t^{(m-1)}\tau^{(n-1)}dt\,d\tau$$

بفرض أن $t=x^2,\tau=y^2$ و بالتالي $t=2\mathrm{xdx},\tau=2\mathrm{ydy}$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{(2\mathrm{m}-2)}y^{(2\mathrm{n}-2)}x\,y\,dxdy$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{(2\mathrm{m}-1)}y^{(2\mathrm{n}-1)}dxdy$$

و بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية :

$$r^2=x^2+y^2,\, x=r\cos\theta,\, y=r\sin\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{(2m-1)}(\sin\theta)^{(2n-1)} r\,dr\,d\theta=$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}(\cos\theta)^{(2m-1)} r^{2m+2n-2}(\sin\theta)^{(2n-1)} r\,dr\,d\theta=$$

$$2\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2m+2n-2}\,2r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{(2n-1)}(\cos\theta)^{(2m-1)}d\theta$$

و بفرض $r^2=Z$ يصبح :

$$=\int_0^{\infty} e^{-Z} Z^{m+n-1}dZ\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{(2n-2)}(\cos\theta)^{(2m-2)}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

و بفرض :

$$\sin^2\theta=X^2-1\,,\cos^2\theta=X^2$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=\Gamma(m+n)B(m,n)\Rightarrow B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

- دستورا واليس Wallis

يمكن استخدام العلاقة $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{(2n-1)}(\cos\theta)^{(2m-1)}d\theta=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

في استنتاج القانون عندما :

$$2n-1=0\,,2m-1=p$$
$$2n-1=q\,,2m-1=0$$

لنجد أن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{(2n-1)}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{(2m-1)}d\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+2}{2})}$$

وعندما p=2q عدد زوجي صحيح .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{(2n-1)}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{(2m-1)}d\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(q+\frac{1}{2})}{\Gamma(q+1)}$$

و عندما p=2q-1 عدد صحيح فردي .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{(2n-1)}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{(2m-1)}d\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q+\frac{1}{2})}$$

و باستخدام خواص الدالة الغماوية نتوصل لصيغتي واليس الأولى و الثانية :

دستور واليس الأول عندما p زوجي :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{(2q)} d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{(2q)} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2.4.6\ldots(2q)}$$

دستور واليس الثاني عندما p فردي :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{(2q-1)} d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{(2q-1)} d\theta = \frac{2.4.6\ldots(2q-2)}{1.3.5\ldots(2q-1)}$$

التابع بيسل *Bessel function*

- معادلة بيسل التفاضلية *Bessel's Differential Equation*

$$Z^2 \acute{\acute{y}} + Z \acute{y} + (Z^2 - a^2) y = 0$$

- تابع بيسل (النوع الأول)لإيجاد الحل :

$$J_a = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(Z+a+n)} \left(\frac{Z}{2}\right)^{2n+a}$$

$$J_{-a} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(Z-a+n)} \left(\frac{Z}{2}\right)^{2n-a}$$

و هذين الحلين لا يكونان مستقلان خطياً عندما يكون عدد **صحيح** موجب .
لذلك نلجأ إلى:

- تابع بيسل (النوع الثاني)المعروف باسم (نيومان *neumann*)

$$Y_v(Z) = \frac{\cos a\pi\, j_v - j_{-v}}{\sin a\pi}$$

- تابع بيسل (النوع الثالث)المعروف باسم (هانكيل *hankel*):

$$H_r^{(1)} = j_v(z) + i Y_v(Z)$$
$$H_r^{(2)} = j_v(z) - i Y_v(Z)$$

كثيرة حدود ليجيندر *legendre polynomials*

- معادلة ليجيندر التفاضلية :

$$(1-x^2)\,\acute{\acute{y}}-2x\,\acute{y}+n(n+1)\,y=0$$

- كثرة حدود ليجيندر :

حلول معادلة ليجندر الخاصة تتمثل في كثيرة حدود ليجيندر و التي تعطى بالعلاقة :

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}[(x^2-1)]^n$$

مسؤولية الفريق

الفريق لا يتحمل أي تبعة من تبعات ورود أخطاء لأن الفريق في طور النشأة و كل ابن آدم خطّاء،و لا ينصح باستخدام إنتاجياته كمصادر تعليمية

في حال ورود خطأ:

يرجى التبليغ على بريد الفريق e7aaproj@gmail.com و لكم جزيل الشكر .

تحديثات:

سيتم بإذنه تعالى تحديث الكتاب كل فترة.

المصادر

Mathematical Handbook of Formulas and Tables
Third Edition